

LA FORMA DEL UNIVERSO

Juan Javier Siller Leyva



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DE AGUASCALIENTES

LA FORMA DEL UNIVERSO

LA FORMA DEL UNIVERSO

Primera edición 2018

D.R. © Universidad Autónoma de Aguascalientes
Av. Universidad 940, Ciudad Universitaria
Aguascalientes, Ags., 20131
www.uaa.mx/direcciones/dgdv/editorial/

© Juan Javier Siller Leyva

ISBN 978-607-8523-98-6

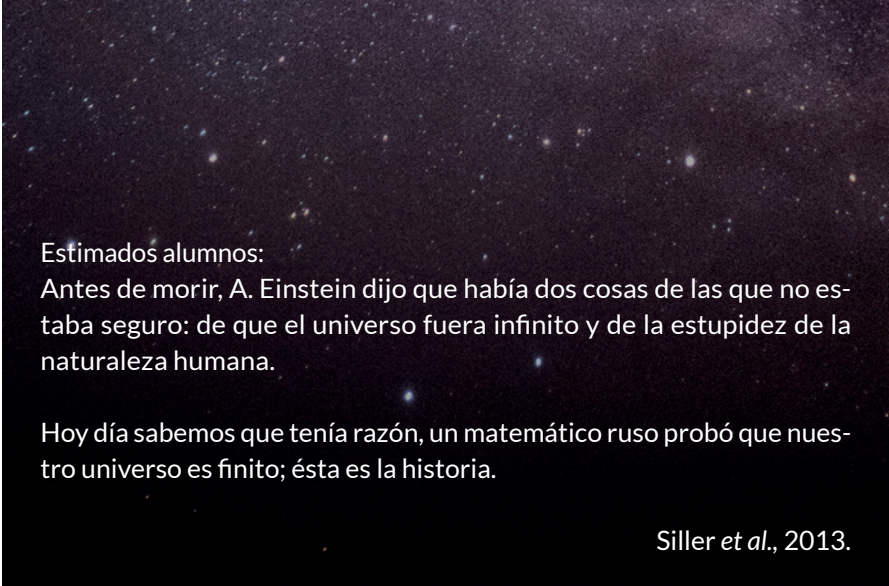
Hecho en México / *Made in Mexico*

LA FORMA DEL UNIVERSO

Juan Javier Siller Leyva

*Cualquier ser infinitamente imperceptible en la
inmensidad del universo, manifiesta de manera
perturbadora lo profundo de su presencia.*

J. Siller, Tesis de Ingeniería, 1976



Estimados alumnos:

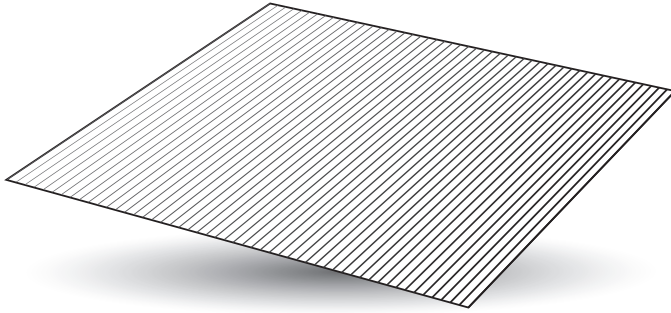
Antes de morir, A. Einstein dijo que había dos cosas de las que no estaba seguro: de que el universo fuera infinito y de la estupidez de la naturaleza humana.

Hoy día sabemos que tenía razón, un matemático ruso probó que nuestro universo es finito; ésta es la historia.

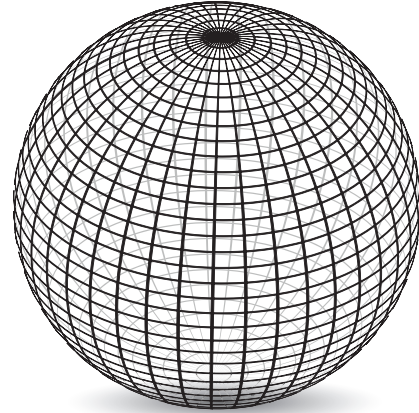
Siller *et al.*, 2013.

Sobre la Conjetura de Poincaré y la forma del universo. Antecedentes

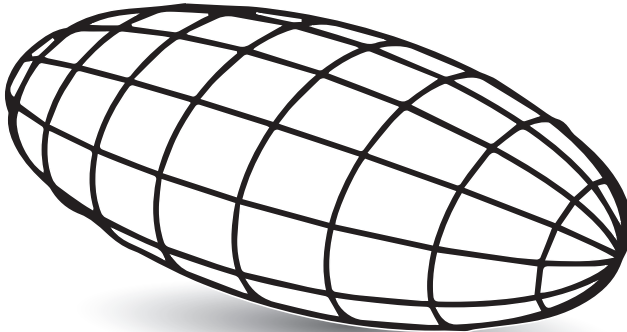
La *Conjetura de Poincaré* es un célebre problema matemático planteado hace aproximadamente 100 años, hoy día ya resuelto. Informalmente, puede considerarse como un problema geométrico relacionado con los intentos de establecer una **clasificación apropiada de las superficies**. Existe una cantidad infinita de superficies distintas en el espacio. Ejemplos sencillos son los planos; igualmente, las superficies de las esferas, de los elipsoides y de los toros, además de los paraboloides, los hiperboloides, entre otros.



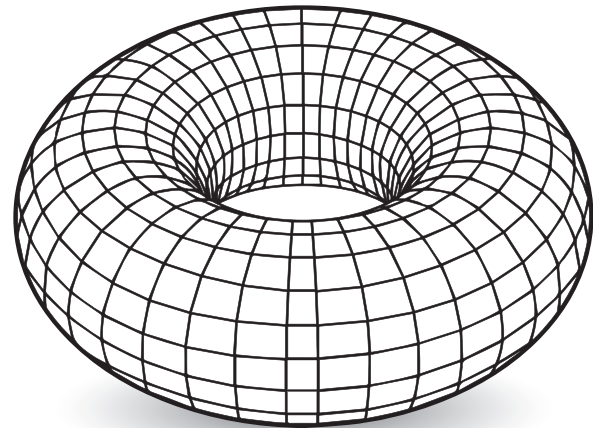
Plano



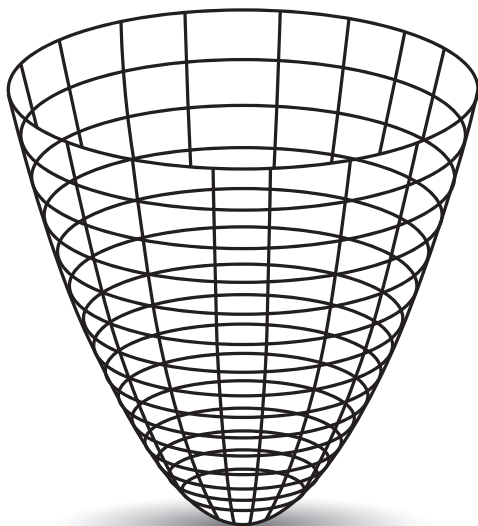
Superficie de una esfera



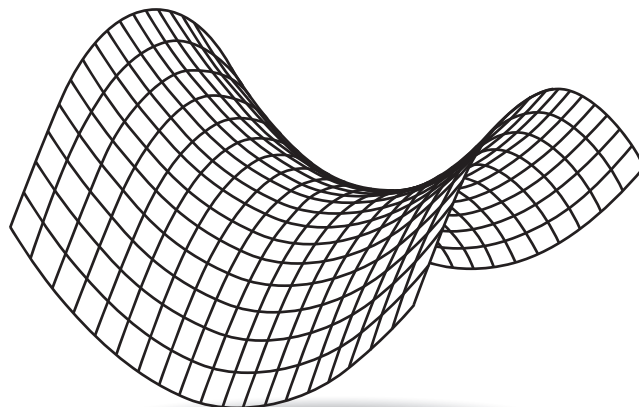
Superficie de un elipsoide



Superficie de un toro



Paraboloide circular



Paraboloide hiperbólico

Los nombres de estas superficies dan lugar a criterios elementales de clasificación. Por ejemplo, un círculo es una **superficie plana**; un hemisferio (la mitad de la superficie de una esfera) es una **superficie esférica**. Algunos términos técnicos representan otros criterios de clasificación. Por ejemplo, la superficie de una esfera y la de un elipsoide son ejemplos de superficies **cerradas** (en el sentido intuitivo de que poseen una región “**interior**” y otra “**exterior**” separadas); en tanto que un plano o un paraboloide no lo son.

Desde otro punto de vista, la superficie de una esfera y la de un toro son ejemplos de superficies **compactas** (término técnico más sofisticado que tiene que ver con que tales superficies son “**limitadas**”, esto es, cada una de ellas se encuentra confinada a una región de diámetro finito en el espacio). Un curioso criterio de clasificación está formulado con base en que las superficies posean o no “**huecos**” u “**orificios**”. Aquellas que no los poseen se denominan



superficies simplemente conexas. Por ejemplo, un plano es una superficie simplemente conexa; por el contrario, la superficie de un toro es un ejemplo de una superficie que no es simplemente conexa, ya que presenta un hueco en la parte central.

La profunda investigación de las **superficies** llevada a cabo durante muchos años condujo a los geómetras a ver en las herramientas desarrolladas en el área conocida como **Análisis matemático** un poderoso arsenal con el cual potenciar notablemente tal investigación. Procedieron entonces a dotar localmente a las superficies con sistemas de coordenadas (como el que comúnmente se usa en el plano y que permite, entre otras cosas, extender a dimensión 2 los conceptos del cálculo infinitesimal).

De este modo, un concepto fundamental del cálculo infinitesimal lo fue la función **diferenciable**, que se ha puesto al servicio de la Geometría con excelentes resultados (de paso, ideas como esta jugaron un papel esencial en el origen de una bella rama de la Matemática denominada Geometría diferencial). Tales superficies, dotadas con sistemas locales de coordenadas y en las cuales es posible “hacer” cálculo infinitesimal, fueron denominadas **variedades diferenciables** o simplemente **variedades**. Un subproducto de estos trabajos fue la posibilidad de definir nuevos criterios de clasificación para las superficies.

Pero, en el contexto de las variedades, resulta particularmente apropiado un criterio de clasificación proveniente de otra rama de la Matemática denominada Topología, la cual frecuentemente se define como la investigación, **a un nivel considerablemente abstracto, de aquellas propiedades de las superficies que no son alteradas por “deformaciones continuas”.**

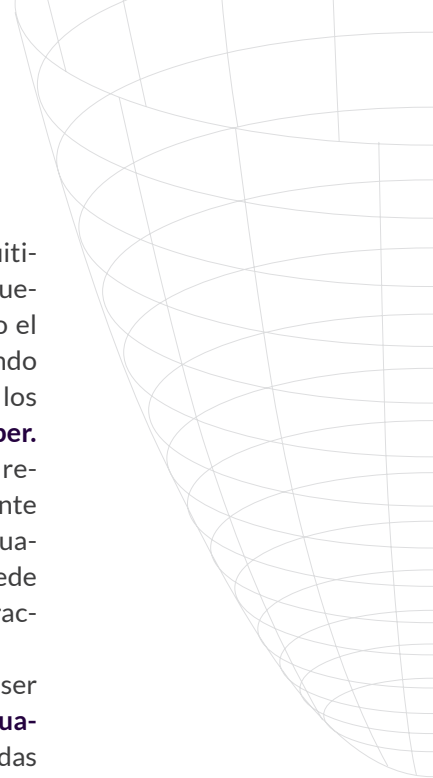


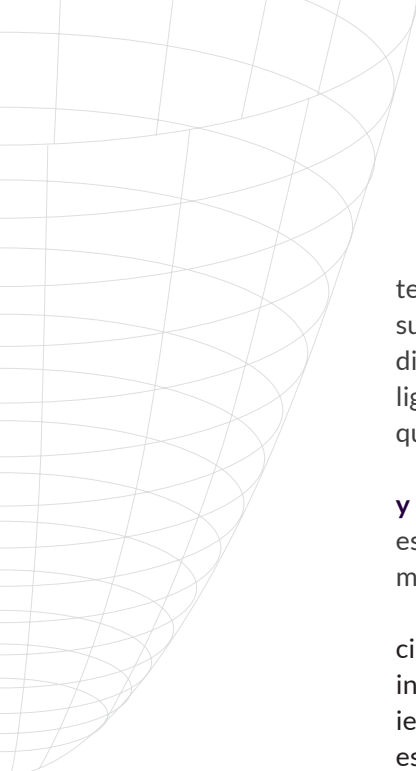
La noción topológica de **deformación continua** es descrita intuitivamente mediante la sugerencia de pensar en las superficies como si fuesen objetos **reales** hechos de algún material elástico, como por ejemplo el caucho; de este modo, las superficies pueden ser deformadas cambiando de aspecto. Las **deformaciones continuas**, tal como son entendidas por los topólogos, permiten **estirar, contraer y retorcer, pero no rasgar ni romper**. Así, un plano puede ser deformado continuamente en un paraboloide de revolución, y la superficie de una esfera puede ser deformada continuamente en la superficie de un elipsoide. En cambio, no es posible deformar continuamente la superficie de una esfera en la de un toro, debido a que no se puede eludir la necesidad de hacer un **rompimiento** para obtener el **agujero** característico de la superficie del toro.

A los ojos de un especialista en Topología, si una superficie puede ser deformada continuamente en otra, entonces las dos son **esencialmente iguales**, ya que aquellas propiedades que interesan al topólogo no son afectadas durante el proceso de deformación. Los topólogos utilizan la expresión técnica **superficies homeomorfa** para referirse a aquellas superficies que son **esencialmente iguales**.

La noción precisa de superficies homeomorfas es un poco más complicada de explicar, y en las aplicaciones resulta ser ligeramente más general que la noción intuitiva de superficies **esencialmente iguales**. Así, en el lenguaje de la Topología, las superficies de dos esferas con radios distintos son homeomorfas.

El procedimiento aplicado de inflar un balón deportivo hasta alcanzar un radio sensiblemente mayor materializa la noción intuitiva de deformar continuamente la superficie de una esfera en la de otra esfera de radio mayor. En consecuencia, para un topólogo sólo hay una superficie de esfera en el espacio, razón por la cual él habla de “la” esfera. **En Topología se usa la expresión “la esfera” para referirse a lo que en el presente texto he estado denominando hasta ahora “la superficie de una esfera”. De aquí en adelante se seguirá esta convención del lenguaje de los topólogos.**





El problema de clasificar las variedades en el espacio usando como criterio de clasificación el concepto de homeomorfismo fue completamente resuelto en el siglo xx. Por ejemplo, se observó que la esfera es una variedad de dimensión 2 (cada trozo pequeño de la esfera es un pequeño trozo de plano ligeramente deformado), cerrada y simplemente conexa. La intuición sugiere que estas propiedades parecen caracterizar topológicamente la esfera.

En efecto, **se estableció que toda variedad de dimensión 2, cerrada y simplemente conexa, es homeomorfa a la esfera.** Dicho de otro modo, esencialmente, sólo hay una variedad de dimensión 2, cerrada y simplemente conexa, y se trata de la esfera.

El paso siguiente fue extender el concepto de **variedad** a otros espacios. Las variedades mencionadas hasta ahora son de dimensión 2 y están inmersas en el espacio de dimensión 3. Por analogía, se definieron las variedades de dimensión 3 en el espacio de dimensión 4 (se puede pensar en estas variedades como si fueran las **superficies** propias del espacio de dimensión 4) y, más generalmente, se definieron las variedades de dimensión n en el espacio de dimensión $n+1$. En concreto, el concepto de variedad se extendió de tal manera que en el espacio de dimensión $n+1$ hay variedades de dimensiones 0, 1, 2, ..., $n+1$.

En 1904, el gran matemático francés Jules Henry Poincaré (1854-1912) conjeturó que el resultado obtenido para la esfera del espacio de dimensión 3 tenía un análogo para la esfera del espacio de dimensión 4. En otras palabras, en el espacio de dimensión 4, toda variedad de dimensión 3, cerrada y simplemente conexa, es homeomorfa a la esfera de dimensión 3.

Otra forma de decir lo anterior es: cualquier variedad tridimensional compacta en la que cualquier trayectoria cerrada puede contraerse en un punto es topológicamente homeomorfa a una esfera tridimensional.

La versión generalizada de la Conjetura de Poincaré resultó ser un problema en gran medida desafiante. Aunque para $n=1$ es trivial y para $n=2$ ya había sido demostrada en el siglo XIX, tan sólo en 1961 fue comprobada para $n=5$ por Erik Christopher Zeeman (1925–2016).

Ese mismo año, el estadounidense Stephen Smale (1930–) obtuvo un sensacional avance al demostrarla para todo $n \geq 7$. En 1962, John R. Stallings comprobó el caso $n=6$. Los casos $n=3$ y $n=4$ mostraron ser extremadamente difíciles. Hubo que esperar hasta 1986, cuando el estadounidense Michael Hartley Freedman (1951–), en lo que fue considerado una espectacular hazaña matemática, consiguió demostrar el caso $n=4$. Su logro fue de tal magnitud que lo hizo merecedor de una Medalla Fields en 1986. Irónicamente, después de ser resuelto con éxito en todas las demás dimensiones, **el caso original $n=3$ se mantuvo inusitadamente resistente a los ataques más agresivos de los matemáticos.**

En noviembre de 2002 corrió el rumor en la Internet de que el matemático ruso Grigori Perelman, del Instituto de Matemáticas de Steklov de Academia de Ciencias de Rusia en San Petersburgo, había publicado en *arXiv* un documento en el que presentaba una demostración de la **Conjetura de Poincaré**.

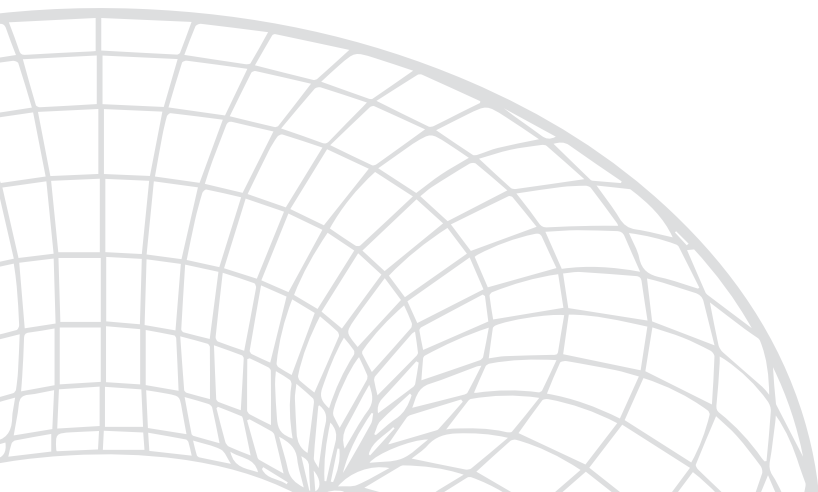


Esto llamó poderosamente la atención, ya que Perelman es reconocido como un sobresaliente especialista en **Geometría diferencial**. Además, el rigor y la solidez de su trabajo gozan de prestigio en la comunidad matemática.

El 11 de noviembre de 2002, Perelman puso a consideración de la comunidad matemática mundial su documento de 39 páginas: ***The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications***.

Perelman no anuncia en este documento una demostración de la Conjetura de Poincaré sino de otra conjetura más general (**que implica la de Poincaré**) denominada la **Conjetura de Geometrización de Thurston**. Esta última conjetura fue propuesta en 1970 por el matemático estadounidense William Paul Thurston (1946–2012), ganador de una Medalla Fields en 1982 por su revolucionario e influyente trabajo de investigación acerca de las variedades de dimensiones 2 y 3. La Conjetura de Geometrización de Thurston es descrita como una conjetura mucho más ambiciosa que la de Poincaré, puesto que plantea una clasificación muy precisa de todas las variedades tridimensionales.

Dada la relación entre ambas conjeturas, basta demostrar la Conjetura de Geometrización de Thurston para que, en particular, quede automáticamente demostrada la Conjetura de Poincaré.



El 10 de marzo de 2003, Perelman publicó en arXiv^a un segundo *documento* de 22 páginas con el título ***Ricci flow with surgery on three-manifolds***, en el cual anuncia algunas mejoras y complementa varios aspectos del documento del 11 de noviembre. Ambos textos son de un nivel altamente técnico, accesibles sólo para los especialistas del área.

$$(y_{\cdot})_{jt} = -\langle K_{ij}$$

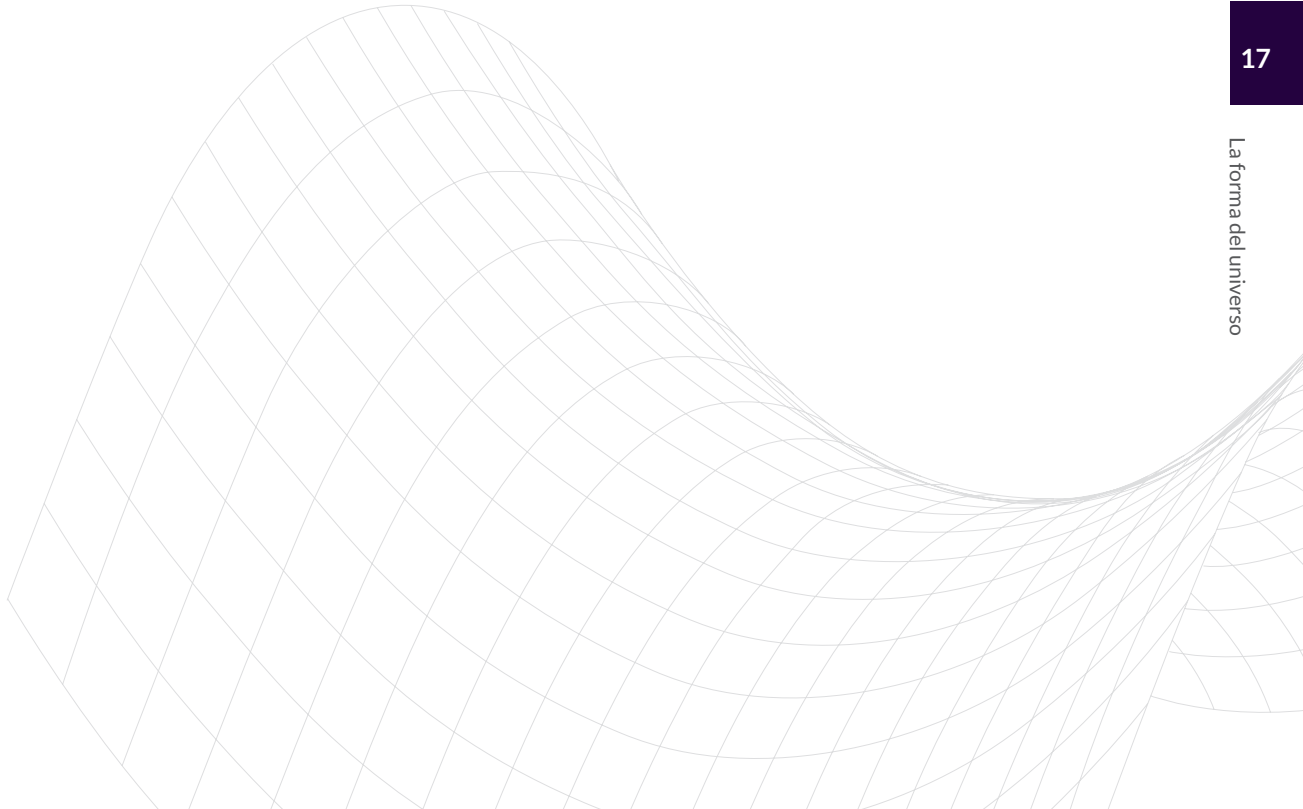


“No quiero estar expuesto como un animal en el zoológico.
No soy un héroe de las matemáticas. Ni siquiera soy tan exitoso.
Por eso no quiero que todo el mundo me esté mirando”.

Perelman

Muchos se preguntan si el premio del millón de dólares constituye la motivación principal para el colosal esfuerzo de Perelman. No sería extraño que así fuera si se tiene en cuenta que Perelman ha realizado este trabajo en Rusia, en solitario, **durante ocho años**, afrontando las difíciles condiciones por las que pasan los académicos rusos como consecuencia de la situación que se vive actualmente en ese país.

La matemática Sun-Yung Alice Chang (1948-), galardonada con el premio Ruth Lyttle Satter en 1995 por sus profundas contribuciones al estudio de las ecuaciones diferenciales parciales en variedades riemannianas, opina: “No creo que el millón de dólares sea la motivación. La Conjetura de Poincaré está en la misma escala del Último Teorema de Fermat. Demostrarla lo coloca a usted en la historia de las matemáticas; el sueño de todo matemático”.



¿Qué tiene que ver todo lo anterior con la forma del universo?

1. En su demostración aplicó la ecuación conocida como **flujo de Ricci**, trata la **curvatura del espacio** como si fuera un tipo exótico de calor, semejante a la lava fundida, que fluye desde regiones más curvadas y la posibilidad de extenderse sobre regiones de menor curvatura.
2. Siguiendo a Perelman, podemos imaginar nuestro universo como un elemento del gigantesco conjunto abstracto de todos los universos matemáticamente posibles.
3. Cuando decimos que la **tierra es una esfera**, estamos afirmando que el objeto matemático llamado esfera es un **buen modelo** de la superficie de la tierra. Por esfera entendemos la “piel”, o superficie de una bola. **No se incluye el contenido.**
4. Veamos el término ‘frontera’. Algunas variedades bidimensionales tienen una frontera y otras no. La frontera de una variedad bidimensional es su borde, o colección de bordes, desde el punto de vista de un observador en la variedad.
5. Un plano que se extiende hasta el **infinito no tiene frontera**, pero un círculo dentro del plano sí la tiene, que no es otra cosa que la circunferencia que lo delimita. La superficie exterior de un segmento de tubo de cobre de un palmo de longitud tiene una frontera (las circunferencias en cada extremo).
Una esfera no tiene frontera (aunque es la frontera de la bola compacta que contiene). Si vivimos en la Tierra, nunca llegaremos a un borde donde se acaba el mundo. Un toro tampoco tiene frontera (aunque es la frontera de la rosca compacta que contiene). Si una variedad bidimensio-

nal tiene frontera, entonces esa frontera es unidimensional. La noción de frontera vale para objetos con distintas dimensiones. El interior macizo de la Tierra tiene una frontera, que es una superficie esférica y, por ende, una variedad bidimensional. **Si una variedad tiene frontera, ésta tendrá una dimensión menos.**

6. Veamos el término ‘finito’.

Decimos que una variedad bidimensional es finita (o compacta) si sólo se requiere un número finito de mapas para cubrirla. Sabemos que una superficie o variedad bidimensional es un objeto matemático, cuyas áreas pueden representarse en forma de mapa sobre una hoja de papel.

El término bidimensional alude a que para cualquier punto de este objeto los puntos vecinos pueden expresarse en dos direcciones independientes. Una colección de mapas que cubra la superficie de manera que cada punto de la misma esté representado en al menos un mapa, se denomina **atlas**.

El plano euclideo que aprendimos en la escuela secundaria, que se extiende infinitamente en dos direcciones independientes, **es una variedad bidimensional no finita**. Tanto la esfera como el toro son variedades bidimensionales finitas (si uno sale de un punto y continúa avanzando, siempre acabará llegando cerca del punto de partida). **Un error común es pensar que todo objeto finito debe tener una frontera.**

Las primeras discusiones sobre la finitud de la tierra a menudo conceptualizaban las alternativas como un mundo que tenía borde por el que uno podría caerse. A las personas no se les ocurrió de entrada que el mundo pudiera ser una esfera (o un toro) y, en consecuencia, pudiera ser finito sin tener frontera.

Pensar que la Tierra es una esfera requiere aceptar la aparentemente absurda idea de que la gente al otro lado camina cabeza abajo. A pesar de que hoy nadie tiene inconveniente en aceptar este hecho, muchos cometen el mismo error cuando hablamos del universo, y aunque asumen que si el universo es finito, entonces debe tener frontera (que ahora sería un objeto bidimensional) que no podemos traspasar... **¡No es así!**

7. La idea central a considerar es la siguiente: **trayectorias cerradas o bucles**. Se trata de trayectorias que comienzan y acaban en el mismo punto de la superficie. Si vivimos en la superficie, podemos concebir un bucle como una circunvalación, la trayectoria que uno describe en un viaje de ida y vuelta al punto de partida.

Los matemáticos suelen introducir relaciones entre bucles llamadas homologías, que permite clasificarlos y manipularlos como si fueran números. Las variedades que difieren topológicamente se distinguen por el comportamiento de sus bucles. En un toro (o cualquier suma conectada de ellos) pueden trazarse bucles esencialmente diferentes de los que pueden trazarse en una esfera.

8. Si todo bucle sobre una variedad puede reducirse a un punto, diremos que la variedad está **simplemente conectada**. Podemos ver que la esfera es la única variedad bidimensional simplemente conectada.
9. Veamos por último las variedades tridimensionales. Así como las variedades bidimensionales son modelos del mundo, las **variedades tridimensio-**



nales son modelos del universo. Existe una variedad tridimensional bella conocida como **esfera tridimensional, que es finita, no tiene frontera y tiene la propiedad de que todo bucle en ella puede reducirse a un punto.**

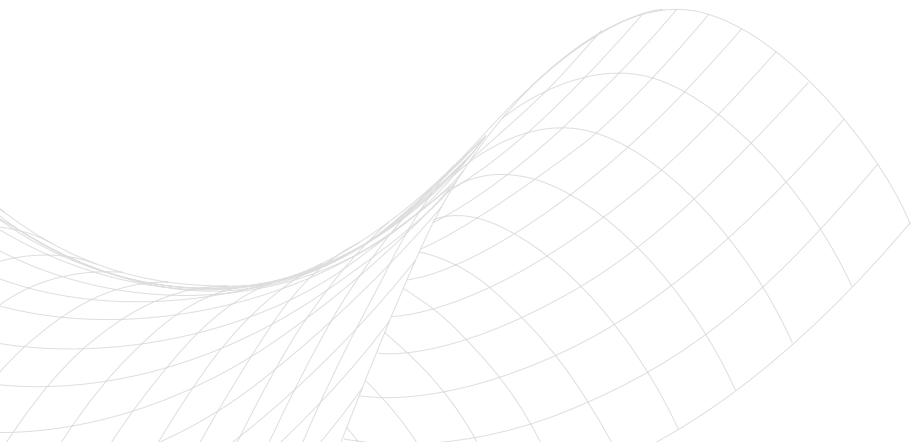
La conjetura de Poincaré establece que ésta es la única variedad tridimensional finita simplemente conectada.

10. Como en el caso de la Tierra, un atlas del universo sería una colección de mapas; pero un mapa de una región del universo no sería una lámina rectangular de papel. **Se parecería más a una caja de vidrio llena de cristales líquidos transparentes,** donde los puntos iluminados corresponderían a las posiciones de planetas y estrellas, entre otros.

Un atlas del universo sería una colección de cajas transparentes, cada región representada en al menos una caja. Si, como parece probable, el universo no es inacabable, el número de cajas necesarias para componer un atlas completo sería finito, **pero no podemos VER el universo completo.** Si tuviéramos un atlas del universo tal que cada parte del mismo estuviera representada, podríamos intentar ensamblar nuestras cajas-mapas. Pero, del mismo modo que no hay sitio en el plano para componer un globo terráqueo, en el espacio ordinario no hay sitio para componer un modelo del universo. No podemos visualizar la forma del universo entero; es más, no es posible salirse del universo **(a menos que pasemos a un agujero de gusano).** Ésta es una importante diferencia entre el **planeta Tierra y el universo.** Supongamos que podemos salirnos del universo, e intentáramos ver qué forma tiene, necesitaríamos poder ver en, al menos, cuatro dimensiones para visualizar el universo entero. **Nuestro cerebro no está evolutivamente capacitado para tal hazaña (Siller et al., 2005).** Esto no quiere decir que el universo no tenga una **forma;** tampoco significa que el universo no tenga curvatura. Podría tener muchas formas diferentes, y es virtualmente seguro que el universo, como la superficie de la Tierra, tiene distintas curvaturas locales.

11. ¿Por qué no es adecuado considerar que el universo es infinito?

Por lo anterior, podemos ratificar de forma contundente, que afirmar que el universo no tiene frontera no equivale a decir que se extiende infinitamente. Podría ser que el universo fuera infinito, pero esto parece **muy improbable**. El espacio y la materia (**antimateria**) están íntimamente ligados, y la afirmación de que el universo posee una **cantidad infinita de materia** plantea serios problemas teóricos, puesto que no podemos ver en más de **tres dimensiones** y tampoco podemos estar fuera del universo; tenemos dificultades insalvables para imaginar la forma del universo entero. Se afirma que **el objeto matemático correspondiente que modela nuestro universo es una variedad tridimensional o trivariiedad (Perelman)**. Es un conjunto en el que cada punto pertenece a una región que puede representarse en los puntos del interior de una caja transparente. Una variedad tridimensional se dice que es compacta o finita si existe un atlas de la misma que sea finito. La variedad tridimensional finita más simple es la esfera tridimensional o triesfera. Así pues, la esfera tridimensional, como la bidimensional, está simplemente conectada, porque cualquier bucle puede reducirse a un punto.



La conjetura de Poincaré: **No hay ninguna variedad tridimensional que tenga la propiedad de que cada trayectoria cerrada pueda contraerse en un punto; sólo la triesfera.**

“CUALQUIER VARIEDAD TRIDIMENSIONAL COMPACTA EN LA QUE CUALQUIER TRAYECTORIA CERRADA PUEDE CONTRAERSE EN UN PUNTO ES TOPOLÓGICAMENTE SEMEJANTE A UNA ESFERA”.

Terminamos con la afirmación de que en este siglo **xxi** podremos responder de forma categórica a la pregunta: **¿Cuál es la forma del universo?**

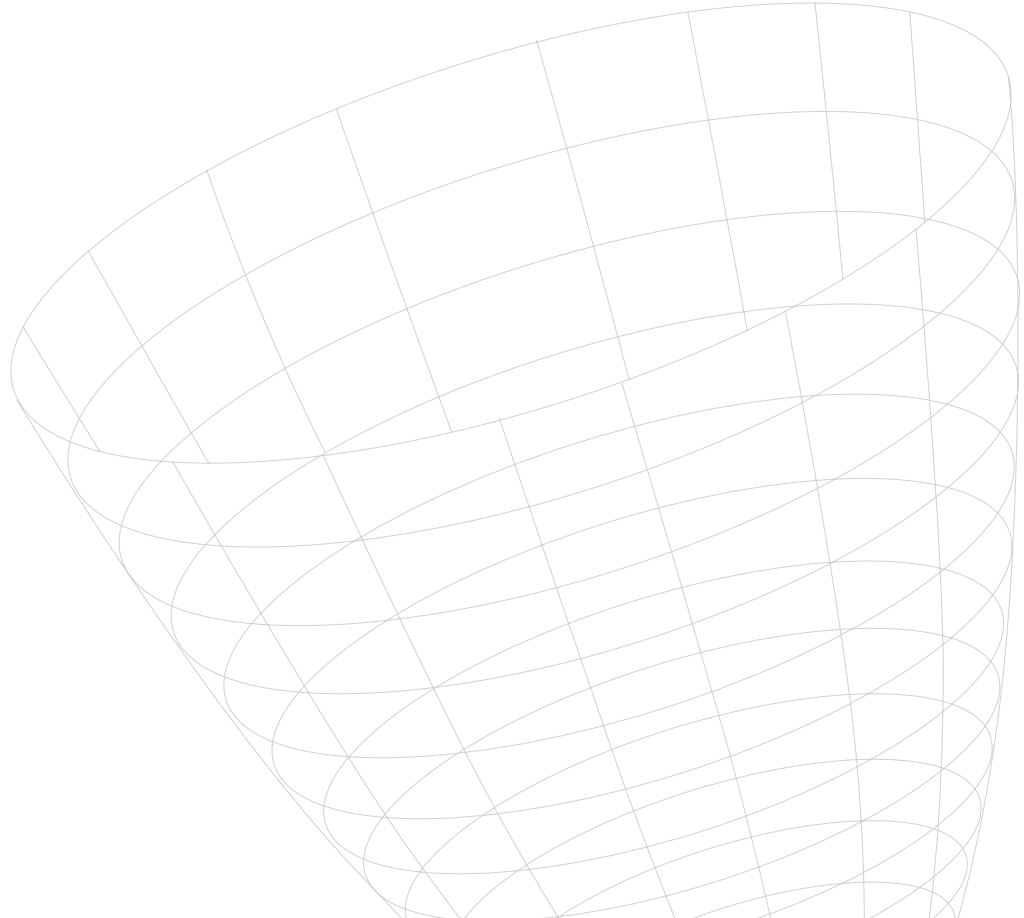
Fuentes de consulta

Gribbin, J. (2007). *En busca de SUSY: supersimetría, cuerdas y la teoría de todo*. España: Paidós.

Luque, B., Ballesteros, F., Márquez, Á., González, M., Agea, A., Lara, L. (2009). *Astrobiología. Un puente entre el Big Bang y la vida*. España: Akal.

O'Shea, D. (2008). *La Conjetura de Poincaré*. España: Tusquets Editores.

arXiv: base de datos para pre publicaciones de artículos científicos en el campo de las matemáticas, física, ciencias la computación y biología cuantitativa.



La forma del universo
Se terminó en:

El cuidado y diseño de la edición estuvieron
a cargo del Departamento Editorial
de la Dirección General de Difusión y Vinculación
de la Universidad Autónoma de Aguascalientes.

